直行座標系を回転させる事を考える。
回転前の座標系をコピーし、「X,Y,Z」座標系とする。
回転対象の座標系を「x,y,z座標系」とする。
はじめ、両者は一致している。

x,y,z座標系をX,Y,Z座標系を基準にしてX軸まわりにθ回転した後、Y軸まわりにϕ回転、最後にZ軸まわりにϕ回転させることを考える。

x_t,y_t,z_t座標系の単位ベクトルを

$$\boldsymbol{v}_i=\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_j=\begin{bmatrix}x_t\\y_j\\z_j\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_k=\begin{bmatrix}x_k\\y_k\\z_k\end{bmatrix}$$

と表すことにする。

このとき、
X軸まわりの回転行列をX,Y,Z座標系を基準にして表現すると、

$$\boldsymbol{R}_X=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

同様にY軸,Z軸に関しては

$$\boldsymbol{R}_Y=\begin{bmatrix}\cos\varphi&0&\sin\varphi\\0&1&0\\-\sin\varphi&0&\cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_Z=\begin{bmatrix}\cos\psi&-\sin\psi&0\\\sin\psi&\cos\psi&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

回転後のx,y,z座標系を「x',y',z'座標系」とし、その単位ベクトルを

$$\boldsymbol{v}_i{}'=\begin{bmatrix}x_i{}'\\y_i{}'\\z_i{}'\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_j{}'=\begin{bmatrix}x_j{}'\\y_j{}'\\z_j{}'\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_k{}'=\begin{bmatrix}x_k{}'\\y_k{}'\\z_k{}'\end{bmatrix}$$

とすれば、

$$[\boldsymbol{v}_i{}',\boldsymbol{v}_j{}',\boldsymbol{v}_k{}']=[\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_k]R_ZR_YR_X$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix}x_i{}'&x_j{}'&x_k{}'\\y_i{}'&y_j{}'&y_k{}'\\z_i{}'&z_j{}'&z_k{}'\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_i&x_j&x_k\\y_i&y_j&y_k\\z_i&z_j&z_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi&\sin\theta\sin\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\psi&\sin\theta\sin\psi+\cos\theta\sin\varphi\cos\psi\\\cos\varphi\sin\psi&\sin\theta\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\psi&\cos\theta\sin\varphi\sin\psi-\sin\theta\cos\psi\\-\sin\varphi&\sin\theta\cos\varphi&\cos\theta\cos\varphi\end{bmatrix}$$