4次のルンゲ=クッタ法

motchy

2015 年 8 月 17 日

目 次

1 1 変数常微分方程式の場合

ルンゲ=クッタ法 (Runge-Kutta method) は常微分方程式の数値的近似解を求める方法の一つであり、オイラー法や修正オイラー法よりも精度が高い。ここでは一般的に用いられている 4 次のルンゲ=クッタ法 (RK4) を物理を題材にして考える。

位置 x が時刻 t の関数 $x(t)$ であって、ある時刻 $t = t_n$ における x の値 $x_n = x(t_n)$ が知られていて、x に関する微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

も知られているとする。このとき、時刻 t_n から微小時間 h だけ経過した時刻 $t_{n+1} = t_n + h$ における x の値 $x_{n+1} = x(t_{n+1})$ は RK4 によれば h の 4 次の項まで正確に、次のようにして計算できる。

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, x_n) \\
k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1) \\
k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2) \\
k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3) \\
x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

2 多変数への拡張

多変数の RK4 は次のようになる。

$$\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) := \begin{bmatrix} f_1(t,\boldsymbol{x}) \\ f_2(t,\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_N(t,\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

と定義する。位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は時刻 t の関数であり、ある時刻 $t = t_n$ における $\boldsymbol{x}$ の値 $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}(t_n)$ が知られていて、$\boldsymbol{x}$ に関する微分方程式が

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$$

で与えられているとする。このとき、時刻 t_n から微小時間 h だけ経過した時刻 $t_{n+1} = t_n + h$ における $\boldsymbol{x}$ の値 $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}(t_{n+1})$ は RK4 によれば h の 4 次の項まで正確に、次のようにして計算できる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{f}\left(t_n, \boldsymbol{x}_n\right) \\
\boldsymbol{k}_2 &= \boldsymbol{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{x}_n + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1\right) \\
\boldsymbol{k}_3 &= \boldsymbol{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{x}_n + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_2\right) \\
\boldsymbol{k}_4 &= \boldsymbol{f}\left(t_n + h, \boldsymbol{x}_n + h\boldsymbol{k}_3\right) \\
\boldsymbol{x}_{n+1} &= \boldsymbol{x}_n + \frac{h}{6}\left(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4\right)
\end{aligned}$$

3 二階常微分方程式への拡張

今度は二階常微分方程式を考える。$\boldsymbol{x}$ に関する微分方程式が

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{x}, \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)$$

で与えられているとする。この場合は方程式を 2 段に分けることを考える。

$$\boldsymbol{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

を、次を満たすものとして陰に定義する。

$$\left\{\begin{array}{lll}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} & = & \boldsymbol{v}\\ \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} & = & \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\end{array}\right.$$

そして

$$\boldsymbol{\xi} \quad := \quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_N\\ v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_N\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{\xi}) \quad := \quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_N\\ f_1(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\\ f_2(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\\ \vdots\\ f_N(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\end{bmatrix}$$

とすると

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \begin{bmatrix}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\\ \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\end{bmatrix} = \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{\xi})$$

が成り立つ。これを多変数の一階微分方程式の要領で数値計算すれば良い。